



TITLE:

On knots with companions

AUTHOR(S):

河野, 正晴

CITATION:

河野, 正晴. On knots with companions. 数理解析研究所講究録 1985, 542: 48-58

ISSUE DATE:

1985-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98773>

RIGHT:

On knots with companions

河野正晴 (神戸大・教養)

(Masaharu Kouno)

V_0 を oriented solid torus とします。 V_0 の中にある knot k_0 が geometrically essential であるとは、 V_0 の任意の meridian disk と k_0 が交わることを言います。

さて、向きづけられた 3 次元球面 S^3 の中に knot k を考えます。 このとき次のようにして S^3 の中にある knot を $k(k_0)$ と書きます。 V を S^3 における k の regular neighborhood とします。 S^3 から定まる向きがはいっているとして、このとき V_0 から V への 同位写像 f が存在しますが、向きを保つ k_0 の像を $k(k_0)$ と書きます。つまり、 $k(k_0) \equiv f(k_0)$ 。

(注意) $k(k_0)$ は k と k_0 から一意にはきまらず、ひねりの分の自由度がでますが、これらのうちのどれでもいいからしつとります。

このとき森谷さんにより次の予想が提出されています ([3])。

予想

V_0 中の geom. ess. な knot k_0 を任意に 1 つ固定する。

k_1, k_2 を S^3 中の 2 つの knot とする。このとき

$$k_1(k_0) \approx k_2(k_0) \implies k_1 \approx k_2$$

ただし " \approx " は same knot type の意味。

ここでは次の定理を示す。

定理 k_1, k_2 : knotted のとき予想は正しい。

(注意) 研究集会後、相馬氏(早大)により、残りの場合も
予想が正しいということが示されました。方法は
Gromov invariant を使ってやるそうです。

さて証明ですが、証明は Schubert の solid torus 中の
knot についての結果と Hakem の finiteness theorem を用
いて行なわれます。

Lemma 0 (Schubert [2])

S^3 中に 2 つの solid torus V, V^* があり knotted
(i.e. core が knotted) とします。更に共通の knot k を含
んでおり、 k は V でも V^* でも geom. ess. とします。

このとき k をとめた isotopy で次のいずれかにできる。

$$(1) \mathring{V} \supset V^*$$

$$(2) \mathring{V}^* \supset V$$

$$(3) \mathring{V}^* \supset S^3 - \mathring{V}$$

$$(4) \exists W; \text{solid torus} \subset \mathring{V} \cap \mathring{V}^*$$

$$\neq O_V(W) = O_{V^*}(W) = 1$$

ただし $O_V(k) = \min \{ \#(D \cap k) \mid D \text{ は } V \text{ の meridian disk} \}$ で $O_V(W) = O_V(\text{core}(W))$ とする。

我々は Lemma 0 とほぼ同じ形の次の Lemma を用いる。

(証明は同様にできる。)

Lemma 1

k, V, V^* は Lemma 0 と同じとする。このとき k をとめた isotopy で次のいずれかにできる。

$$(I) \partial V \cap \partial V^* = \emptyset$$

$$(II) \exists D_1, D_2 \neq$$

① D_i は V と V^* の meridian disk ($i=1, 2$)

② $V - \cup D_i$ の一つの component 中で $V^* - \cup D_i$

の一つの component が ball pair と (2

knotted (図 1 を参照)。

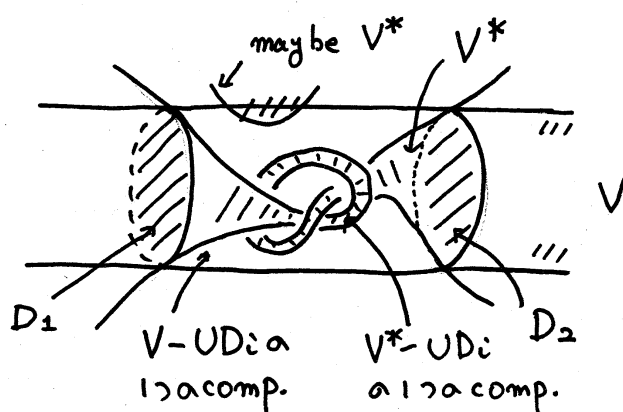


図. 1

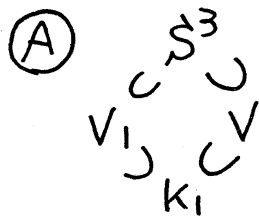
Lemma 2 (Haken's finiteness theorem)

任意の compact 3-manifold M に対して次の条件を満たす
有限個の整数 $h(M)$ が存在する。

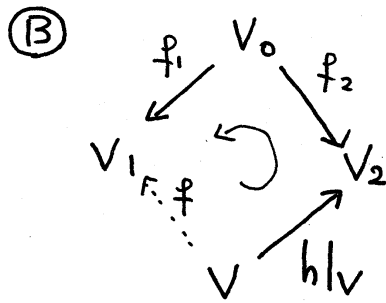
- (1) 任意の disjoint な 2-sided incompressible な surface
の集まり, F_1, \dots, F_m に対して $m > h(M)$ ならば
ある i, j について ($i \neq j$), F_i と F_j は parallel。
- (2) (1) の条件を満たす数の中で $h(M)$ は最小

証明は [1] などを参照して下さい。

さて定理の証明をはじめます。 $K_i \equiv k_i(k_0)$ ($i=1,2$)
とあくと、 $K_1 \approx K_2$ より S^3 上の向きを保つ同相写像 h
が存在して $h(K_1) = K_2$ となる。 $V = h^{-1}(V_2)$ とあくと次の
状況になっている。



$\text{core}(V_1), \text{core}(V)$ は knotted で
 K_1 は V_1 でも V でも geom. ess. 。



$f = f_1 \circ f_2^{-1} \circ h|_V$ とおくと f は
 V から V_1 へ α 向きを保つ同相写像
 で、 $f(K_1) = K_1$ 。

ここで次の Lemma が成立する。

Lemma 3

定理の状況において次のいずれかが成立する。

- (i) $\text{core}(V) \approx \text{core}(V_1)$ つまり $k_1 \approx k_2$
- (ii) solid torus V_1' が存在して次を満たす。
 - ① $V_1' \supset K_1$ かつ K_1 は V_1' で geom. ess.
 - ② $\text{core}(V_1')$ は knotted
 - ③ V と V_1' は Lemma の case II の様になっている。
 つまり、 $\exists D_1, D_2$ 十
 - (a) D_i は V 及び V_1' の meridian disk ($i=1,2$)
 - (b) $V - \cup D_i$ の 1 つの component の中で $V_1' - \cup D_i$
 の 1 つの component は knotted

(proof) ①より Lemma 1 を適用できて、 V_1 と V は

case (I) $\partial V \cap \partial V_1 = \emptyset$, or

case (II) $\exists D_1, D_2$

+ ① D_i は V 及び V_1 の meridian disk ($i=1,2$)

② $V - \cup D_i$ の 1 つの component α 中で $V_1 - \cup D_i$

の 1 つの component は knotted

のいずれかとしてよい。 case (II) のときは $V_1' = V$ とおけば Lemma 3 は成立。 よって Case (I) を考える。

$\partial V_1 \cap \partial V = \emptyset$ より V と V_1 の関係は次の3つ。

① $V_1 \subset \overset{\circ}{V}$

② $V \subset \overset{\circ}{V}_1$

③ $V_1 \cup V = S^3$

($V_1 \cap V \supset K_1 \neq \emptyset$ より $V_1 \cap V = \emptyset$ はなし) ここで、

$T \equiv \partial V$, $T_1 \equiv \partial V_1$ とする。 V と V_1 の役割をいれかえ、
 f を f^{-1} にとりかえれば ① 成立のとき ② 成立が言えるので
 ① と ③ の場合のみ示せばよい。

Case ① T と T_1 が parallel のときは $\text{core}(V) \approx \text{core}(V_1)$

なので、 T と T_1 は non-parallel とする。 $V_1 = f(V) \subset V$

より f^m が定義されるので、 $V_m \equiv f^m(V)$, $T_m \equiv \partial V_m$ と

おくと次が示される。

① T_i は incompressible in $S^3 - \overset{\circ}{U}(K_1)$ 。 ここで

$U(K_1)$ は K_1 の regular neighborhood。

② T_i と T_j は non-parallel ($i \neq j$)

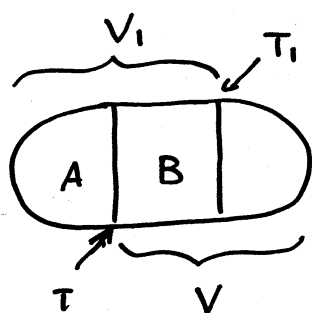
$\mathbb{S}^3 - \bigcup (K_i)$ には disjoint non-parallel な incompressible surface が何個でもとれるので、Lemma 2 に矛盾。

Case ③ $T_1 \subset V$ より $T_2 \equiv f(T_1)$ が定義できるが、このとき次の 2 つの case が考えられる。

case 1 ; $T \cap T_2 = \emptyset$

case 2 ; $T \cap T_2 \neq \emptyset$

case 1



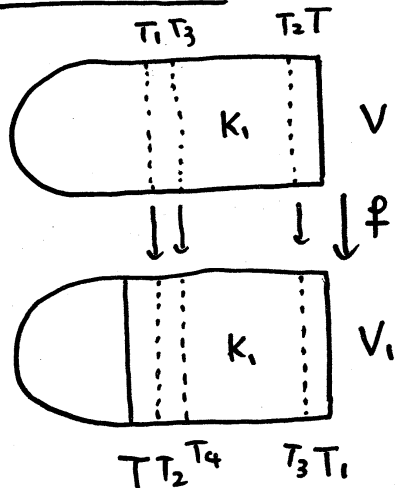
このとき、 $B \equiv V \cap V_1$, $A \equiv V_1 - \bar{B}$ と

すると、 $T_2 \subset B$ or $T_2 \subset A$ 。 $T_2 \subset A$ のときは V と V_1 の役割をいれかえ、 f を f^{-1} にかえることにより前者と考えるので、 $T_2 \subset B$ とする。更に 2 つの case にわけると

case (1-i) T と T_2 は non-parallel

case (1-ii) T と T_2 は parallel

case (1-i)



$T_2 \subset B$ により $T_3 \equiv f(T_2)$ が定義されるが、 T_3 と T_1 は non-parallel。

$T_3 \subset B$ より $T_4 \equiv f(T_3)$ が定義されるが、 $T_3 \not\propto T_1$ より $T_4 \not\propto T_2$ 。

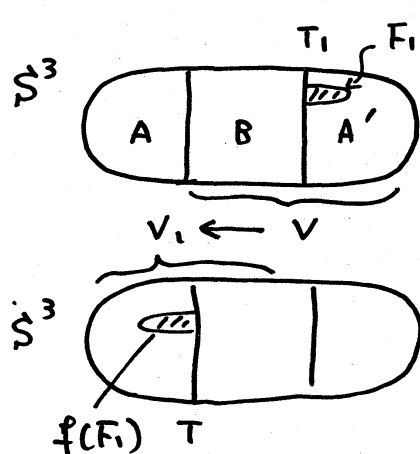
以下同様にして T_n が定義される。

T_n と T_{n+2} は non-parallel。又

T_n と T_{n+1} で cut した component

で T_n, T_{n+1} を含む α には K_1 がはいっている α で $T_n \neq T_{n+1}$
 $\text{in } S^3 - \dot{\bigcup}(K_i)$ 。これより $T_i \neq T_j$ ($i \neq j$) が言える。又
 T_i は $S^3 - \dot{\bigcup}(K_i)$ で incompressible なので Lemma 2 に矛盾。

case (1-ii) このとき $f^{-1}(T)$ は T_1 と parallel なので、 V_1
 を少しふくらませて $\partial V_1 = T_1 = f^{-1}(T)$ とすることにより、
 $f(T_2) = T$ としよ。 $A' = V - \dot{B}$ とおくと $f(A') = A$ 。



ここで V_1 a meridian disk が T と交
 わっていないとすると V が
 (core(V)) が unknotted となるの
 で、 V_1 a meridian disk は B 中に
 あるとしよ。 T_1 a meridian
 m_1 に対し、meridian disk D_1 が

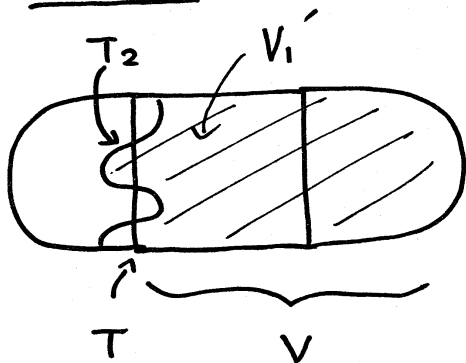
存在して $\partial D_1 = m_1$ となるが、 $D_1 \subset B$ なので $f(D_1)$ を考える
 ことができる。よって f は T_1 a meridian を T a meridian に
 うつす。又 T_1 a longitude l_1 に対しては、orientable surface
 F_1 が A' にあり、 $\partial F_1 = l_1$ となり、 $f(F_1)$ が定義されるので、
 f は T_1 a longitude を T a longitude にうつす。ここで、

$$A' = S^3 - \dot{V}_1 = S^3 - \dot{\bigcup}(K_1)$$

$$A = S^3 - \dot{V} \cong S^3 - \dot{\bigcup}(K_2) \quad \text{である。}$$

$f|_{A'}$ は A' から A への向きを保つ同相写像で、meridian を
 meridian、longitude を longitude にうつすので、 $k_1 \approx k_2$ 。

case 2 : $T \cap T_2 \neq \emptyset$



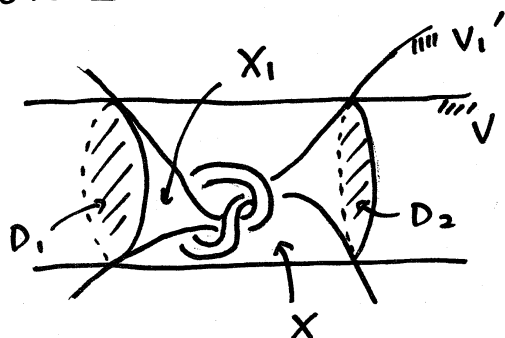
T_2 は $S^3 - \dot{\cup}(K_1)$ では incompressible
だが S^3 ではそうでないので、
 $cl(S^3 - T_2)$ の K_1 を含む方の
component は solid torus。これを
 V_1' とおく。 V と V_1' が Lemma 1

の条件を満たすことはわかるので、 V と V_1' に Lemma 1 を適用
すると、case (I) はおこらないので、case (II) がおこり。
この Lemma の case (ii) がおこる。

induction で定理を示すため $h_T(V, K_1)$ を定義する。
 $h_T(V, K_1) \equiv V - \dot{\cup}(K_1)$ に含まれる disjoint non-parallel
な incompressible tori の数 $\alpha \max$ 。

[1] $h_T(V, K_1) = 1$ のとき。このときは $core(V) \approx K_1$
 $\approx core(V_1')$ なので定理は成立。

[n] $h_T(V, K_1) = n \geq 2$ で $n-1$ 以下 αk_0 について
は定理が示さしていると仮定する。 V と V_1' に Lemma 3 を適



用する。(i) がおこってしま
う、K. なので (ii) がおこっている
とする。i.e. $\exists D_1, D_2$;
 $V - \dot{\cup} D_i$ の 1 つの component

(それを X とおく) α 中で $V_1' - U D_i$ α 1 つ α component
 (それを X_1 とおく) が knot してゐる。 $Y \equiv V - X$,
 $\tilde{W} \equiv Y \cup X_1$, $W \equiv \tilde{W} - \bigcup (\partial \tilde{W}, \tilde{W})$ とおく。ただし,
 $\bigcup (\partial \tilde{W}, \tilde{W})$ は \tilde{W} にあける $\partial \tilde{W}$ α regular neighborhood。
 このとき K_1 は W で geom. ess. で $\text{core}(W)$ は V で geom.
 ess. で $\text{core}(W) = \text{core}(V)$ ということはない。

このとき次の 2 つの case がある。

$$(a) \text{ core}(W) \approx K_1$$

$$(b) \text{ core}(W) \not\approx K_1$$

case (a) (X, X_1) α ball pair に trivial ball pair
 をはりつけてできる knot α knot type を α とすると、

$$K_1 \approx \text{core}(W) = \text{core}(V) \# \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{又、 } \text{core}(f(W)) &= \text{core}(f(V)) \# \alpha \\ &= \text{core}(V_1) \# \alpha \end{aligned}$$

$f(K_1) = K_1$ より $\text{core}(W) \approx \text{core}(f(W))$ 。knot α
 decomposition α uniqueness より $\text{core}(V) \approx \text{core}(V_1)$

case (b) $\text{core}(W) \not\approx K_1$ α ときは、

$$h_T(V, K_1) > h_T(W, K_1) \quad \text{かつ}$$

$$h_T(V, K_1) > h_T(V, \text{core}(W)) \text{ が成り立つ。}$$

帰納法 α 仮定より、 $\text{core}(W) \approx \text{core}(f(W))$ 。更に、

$(V, \text{core}(W))$ と $(V_1, \text{core}(f(W)))$ に帰納法 α 仮定を

また、 $\text{core}(V) \cong \text{core}(V_i)$ 。よって定理は示された。

References

- [1] Hempel, "3-manifolds", Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. press, (1976)
- [2] Schubert, Knoten und Vollringe, Acta Math. 90
- [3] T. Shibuya, On knot types of compound knots, Math. Semi. Notes. Vol 10 (1982)